Sur un problème d'ordre 4 en dynamique de population

Alexandre Thorel

En collaboration avec R. Labbas, S. Maingot & D. Manceau

Séminaire doctorant - 5 Mai 2016

Introduction

- Motivation : on étudie un problème elliptique stationnaire linéarisé (dû à Cohen-Murray 1981) de diffusion généralisée en dynamique de population modélisé par l'équation

$$\begin{cases} k_2 \Delta^2 u - k_1 \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ C.L. & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où u est la densité de population, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^*$, $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$ et Ω cylindrique du type :

$$\Omega :=]a, b[\times \omega,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine de classe C^4.

Introduction

- Motivation : on étudie un problème elliptique stationnaire linéarisé (dû à Cohen-Murray 1981) de diffusion généralisée en dynamique de population modélisé par l'équation

$$\begin{cases} k_2\Delta^2 u - k_1\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ C.L. & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

  où u est la densité de population, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^*$, $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$ et Ω cylindrique du type :

$$\Omega :=]a, b[\times \omega,$$

  où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine de classe C^4.

- Objectif : Existence, unicité et régularité de la solution de (1).

Introduction

- Motivation : on étudie un problème elliptique stationnaire linéarisé (dû à Cohen-Murray 1981) de diffusion généralisée en dynamique de population modélisé par l'équation

$$\begin{cases} k_2\Delta^2 u - k_1\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ C.L. & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où u est la densité de population, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^*$, $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$ et Ω cylindrique du type :

$$\Omega :=]a, b[\times \omega,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine de classe C^4.

- Objectif : Existence, unicité et régularité de la solution de (1).

- Méthodes : On utilise des méthodes liées aux équations différentielles opérationnelles (*i.e.* à coefficients opérateurs).

Plan

1. Le problème abstrait

Plan

Plan

1. Le problème abstrait
2. Les résultats
   - Premières conditions aux bords
   - Deuxièmes conditions aux bords
3. Perspectives

Plan

La méthode

- L'espace Ω étant cylindrique, on procède à une séparation des variables en notant
$$u(x)(y) := u(x, y).$$
On définit l'opérateur A par son action
$$A\varphi := \Delta_y \varphi$$
et son domaine $D(A) \subset X$ qui dépend des conditions aux bords considérées, avec $X := L^q(\omega)$.

La méthode

- L'espace Ω étant cylindrique, on procède à une séparation des variables en notant
$$u(x)(y) := u(x, y).$$
On définit l'opérateur A par son action
$$A\varphi := \Delta_y \varphi$$
et son domaine $D(A) \subset X$ qui dépend des conditions aux bords considérées, avec $X := L^q(\omega)$.

- Le problème (1) s'écrit alors en une équation différentielle opérationnelle du quatrième ordre :
$$u^{(4)}(x) + (2A - kI)u''(x) + (A^2 - kA)u(x) = f(x),$$
où $x \in \,]a, b[$ et $k := k_1/k_2$.

Les outils

- Soit $\omega \in \,]0, \pi[$, on définit le secteur

$$S_\omega := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |arg(z)| < \omega\}$$

  et $Sect(\omega)$ l'espace des opérateurs sectoriels C sur X, *i.e.* :

  - $\sigma(C) \subset \overline{S_\omega}$,
  - $\forall \omega' \in \,]\omega, \pi[, \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}} \|\lambda(C - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty$.

- $C \in Sect(\omega)$ et $\omega < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow -C$ génère un semi-groupe analytique.

- Enfin, on utilisera les opérateurs BIP, *i.e.* :
  - C opérateur sectoriel injectif,
  - $\overline{D(C) \cap R(C)} = X$,
  - $C^{is} \in \mathcal{L}(X), \; \forall s \in \mathbb{R}$.

Le problème opérationnel

Soit $f \in L^p(a,b;X)$, on considère l'équation :

$$u^{(4)}(x) + (2A - kI)u''(x) + (A^2 - kA)u(x) = f(x), \quad x \in \,]a,b[, \qquad (2)$$

Le problème opérationnel

Soit $f \in L^p(a,b;X)$, on considère l'équation :

$$u^{(4)}(x) + (2A - kI)u''(x) + (A^2 - kA)u(x) = f(x), \quad x \in]a,b[, \qquad (2)$$

sous l'une des conditions aux limites suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} u(a) & = & \varphi_1, & u(b) & = & \varphi_2, \\ u''(a) & = & \varphi_3, & u''(b) & = & \varphi_4, \end{array}\right. \qquad (BC1)$$

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} u(a) & = & \varphi_1, & u(b) & = & \varphi_2, \\ u'(a) & = & \varphi_3, & u'(b) & = & \varphi_4, \end{array}\right. \qquad (BC2)$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in X$; X est un espace de Banach complexe.

Le problème opérationnel

Soit $f \in L^p(a,b;X)$, on considère l'équation :

$$u^{(4)}(x) + (2A - kI)u''(x) + (A^2 - kA)u(x) = f(x), \quad x \in]a,b[, \qquad (2)$$

sous l'une des conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} u(a) & = & \varphi_1, & u(b) & = & \varphi_2, \\ u''(a) & = & \varphi_3, & u''(b) & = & \varphi_4, \end{array} \right. \qquad \text{(BC1)}$$

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} u(a) & = & \varphi_1, & u(b) & = & \varphi_2, \\ u'(a) & = & \varphi_3, & u'(b) & = & \varphi_4, \end{array} \right. \qquad \text{(BC2)}$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in X$; X est un espace de Banach complexe.

On cherche alors une solution stricte :

$$u \in W^{4,p}(a,b;X) \cap L^p\left(a,b;D(A^2)\right) \quad \text{avec} \quad u'' \in L^p(a,b;D(A)).$$

Les hypothèses

On considère le cadre général suivant :

Hypothèses :

- (H_1) X est un espace UMD,
- (H_2) A est inversible avec inverse borné,
- (H_3) $-A \in \mathrm{BIP}(\theta_0, X)$ avec $\theta_0 \in \,]0, \pi[$ fixé,
- (H_4) $[k, +\infty[\, \subset \rho(A), \; k \in \mathbb{R}^*$.

Certains résultats nécessiteront :

Hypothèse supplémentaire :

- (H_5) $-A$ est sectoriel d'angle θ pour tout $\theta \in \,]0, \pi[$.

Plan

Résolution du problème (2)-(BC1)

Théorème (Labbas, Maingot, Manceau & A. T.)

Soit $f \in L^p(a,b;X)$. *Sous les hypothèses* (H_1), (H_2), (H_3) *et* (H_4) *: il existe une unique solution stricte de* $(2)-(BC1)$ *si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in D(A) \quad \text{et} \quad A\varphi_1, A\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Résolution du problème (2)-(BC1)

Théorème (Labbas, Maingot, Manceau & A. T.)

Soit $f \in L^p(a,b;X)$*. Sous les hypothèses* (H_1), (H_2), (H_3) *et* (H_4) *: il existe une unique solution stricte de* $(2)-(BC1)$ *si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in D(A) \quad \textit{et} \quad A\varphi_1, A\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Idée de la preuve.

On résout (voir Favini et al. 2008) le problème d'ordre 2

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = v(x), \ x \in \,]a,b[\\ u(a) = \varphi_1, \ u(b) = \varphi_2, \end{cases}$$

dont le second membre est l'unique solution de

$$\begin{cases} v''(x) + (A - k\,I)v(x) = f(x), \ x \in \,]a,b[\\ v(a) = \varphi_3 + A\varphi_1, \\ v(b) = \varphi_4 + A\varphi_2. \end{cases}$$

$\square$

Formule de représentation

Proposition (Labbas, Maingot, Manceau & A. T.)

Si u *est une solution de (2), alors il existe* $K_i \in X$, $i = 1, 2, 3, 4$, *tel que pour tout* $x \in [a, b]$

$$u(x) = e^{(x-a)M}K_1 + e^{(b-x)M}K_2 + e^{(x-a)L}K_3 + e^{(b-x)L}K_4 + S_{0,f}(x). \quad (3)$$

où $S_{0,f}$ *est la solution du problème (2)-(BC1) avec les conditions aux bords homogènes et* $M := -\sqrt{-A}$ *et* $L := -\sqrt{-A + k\,I}$.

Formule de représentation

Proposition (Labbas, Maingot, Manceau & A. T.)

Si u *est une solution de (2), alors il existe* $K_i \in X$, $i = 1, 2, 3, 4$, *tel que pour tout* $x \in [a, b]$

$$u(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 + e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4 + S_{0,f}(x). \quad (3)$$

où $S_{0,f}$ *est la solution du problème (2)-(BC1) avec les conditions aux bords homogènes et* $M := -\sqrt{-A}$ *et* $L := -\sqrt{-A + k\,I}$.

Idée de la preuve.

On généralise la méthode de Krein en posant

$$v \;:=\; k^{-1} L^2 u - k^{-1} u'' \quad \text{et} \quad w \;:=\; -k^{-1} M^2 u + k^{-1} u''.$$

On montre que v et w sont solutions de 2 problèmes d'ordre 2. On conclut en notant que

$$v + w = k^{-1}(L^2 - M^2)u = u.$$

$\square$

Résolution du problème (2)-(BC2)

Théorème (Labbas, Maingot, Manceau & A. T.)

Soit $f \in L^p(a, b; X)$. *Sous les hypothèses* (H_1), (H_2), (H_3), (H_4) *et* (H_5) *: il existe une unique solution stricte de (2)-(BC2) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p},p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.$$

L'idée de la preuve se décompose en 2 parties :

1. Existence et unicité
2. Régularité maximale

On donne les idées des preuves pour chaque partie.

Existence et unicité de la solution de (2)-(BC2)

De la formule :

$$u(x) = e^{(x-a)M}K_1 + e^{(b-x)M}K_2 + e^{(x-a)L}K_3 + e^{(b-x)L}K_4 + S_{0,f}(x)$$

et des conditions aux limites :

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} u(a) & = & \varphi_1, & u(b) & = & \varphi_2, \\ u'(a) & = & \varphi_3, & u'(b) & = & \varphi_4, \end{array}\right. \tag{BC2}$$

on obtient un système que l'on écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} I & e^{(b-a)M} & I & e^{(b-a)L} \\ e^{(b-a)M} & I & e^{(b-a)L} & I \\ M & -Me^{(b-a)M} & L & -Le^{(b-a)L} \\ Me^{(b-a)M} & -M & Le^{(b-a)L} & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 - S'_{0,f}(a) \\ \varphi_4 - S'_{0,f}(b) \end{pmatrix}.$$

On résout ce système, en inversant le déterminant grâce au calcul fonctionnel des opérateurs sectoriels.

Régularité de la solution

Pour obtenir la régularité maximale, on écrit :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{(x-a)M}\,(K_1 + K_3) + e^{(b-x)M}\,(K_2 + K_4) \\ &\quad + \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M}\right) K_3 + \left(e^{(b-x)L} - e^{(b-x)M}\right) K_4 + S_{0,f}(x). \end{aligned}$$

Régularité de la solution

Pour obtenir la régularité maximale, on écrit :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{(x-a)M}(K_1+K_3)+e^{(b-x)M}(K_2+K_4) \\ &\quad + \left(e^{(x-a)L}-e^{(x-a)M}\right)K_3+\left(e^{(b-x)L}-e^{(b-x)M}\right)K_4+S_{0,f}(x). \end{aligned}$$

Nous estimons alors la régularité de la différence d'exponentielles par :

Théorème (Labbas, Maingot, Manceau & A. T.)

Supposons que (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4) soient vraies. Pour tous $\varphi \in X$ et $x \in \,]a,b]$, on pose

$$u_\varphi(x) := \left(e^{(x-a)L}-e^{(x-a)M}\right)\varphi.$$

Alors, on a

$$u_\varphi \in W^{4,p}(a,b;X)\cap L^p\left(a,b;D(M^4)\right) \Longleftrightarrow \varphi \in (D(M),X)_{1+\frac{1}{p},p}.$$

De plus, on a $u''_\varphi \in L^p(a,b;D(M^2))$.

Ce Théorème se démontre grâce au Théorème de Dore-Venni et à des résultats d'interpolation.

Plan

Perspectives

- Affaiblir l'hypothèse (H_5) (voire la supprimer)

Perspectives

- Affaiblir l'hypothèse (H_5) (voire la supprimer)
- Étendre à l'équation

$$u^{(4)} + (P+Q)u'' + PQu = f$$

Perspectives

- Affaiblir l'hypothèse (H_5) (voire la supprimer)
- Étendre à l'équation

$$u^{(4)} + (P + Q)u'' + PQu = f$$

- Étudier le problème dans le cas non linéaire

Perspectives

- Affaiblir l'hypothèse (H_5) (voire la supprimer)
- Étendre à l'équation

$$u^{(4)} + (P+Q)u'' + PQu = f$$

- Étudier le problème dans le cas non linéaire
- Étudier un problème de transmission

Merci de votre attention !